Teniu aptitud per a les matemàtiques?

La secció de matemàtiques de la Universitat Independent de Moscou organitza cada any un examen d'admissió per tal de seleccionar els candidats més aptes per a les matemàtiques d'entre tots els inscrits. Feu-vos vosaltres mateixos una prova. No cal saber fórmules ni tenir facilitat per al càlcul.

CHRISTIAN BLATTER

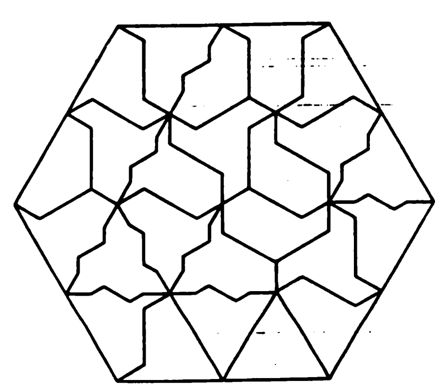
L'examen proposat la tardor de 1991, del qual hem tret el nostre problema, va ser publicat en els *Notices* de la Societat Matemàtica Americana el mes de febrer de 1993; en aquest número dels *Notices* es discutia en general l'estat de les matemàtiques i la situació dels matemàtics a l'antiga Unió Soviètica. Per prendre part en l'examen al qual ens referim calien ben pocs coneixements previs de matemàtiques; així doncs, el problema i el mètode de resolució són fàcils d'entendre i no pressuposen saber fórmules ni ser hàbil calculant. En resum: qualsevol lector pot participar-hi. Us convido a una petita experiència matemàtica. Preparats? Començarem amb la traducció al català d'una traducció a l'alemany d'una traducció a l'anglès de l'enunciat original en rus:

> **Un triangle equilàter de costat a es pot recobrir amb 5 triangles equilàters de costat b. Demostreu que és possible recobrir el triangle de costat a amb 4 triangles de costat b.**

Ho heu entès? Tingueu en compte que aquest problema anava adreçat als millors alumnes de l'ensenyament secundari, que evidentment coneixien l'argot. Nosaltres, però, serà bo que tornem a formular el problema fent servir un llenguatge més planer.

En els problemes de recobriments, es tracta de tapar completament una figura donada (en el nostre cas, un triangle equilàter de costat a) utilitzant el nombre mínim possible de còpies d'una altra figura (triangles equilàters de costat b). La figura 1 mostra un recobriment d'un triangle equilàter gran mitjançant sis triangles equilàters petits. Observeu que les sobreposicions estan permeses expressament. Problemes d'aquest tipus no només apareixen en els exàmens, sinó també en les matemàtiques avançades (i fins i tot fora de les matemàtiques), i molts d'ells no han pogut ser mai resolts.

Anem per feina! Estem parlant de dues longituds a i b que no ens han pas estat especificades amb nombres concrets. L'única cosa que sabem és que cinc triangles petits són suficients per recobrir el triangle gran. L'enunciat afirma que, en aquesta situació, amb quatre triangles petits de costat b n'hauríem de tenir prou. En sentir-ho per primer cop, costa de creure-ho! Tanmateix, anem a donar-ne una demostració.



Hem de veure que «si cinc són suficients, també ho són quatre»; en altres paraules: «és impossible que es pugui fer amb cinc i no es pugui fer amb quatre». Dit encara d'una altra manera (que és la recíproca de la primera proposició), «*si amb quatre no es pot fer, llavors tampoc no es pot fer amb cinc*».

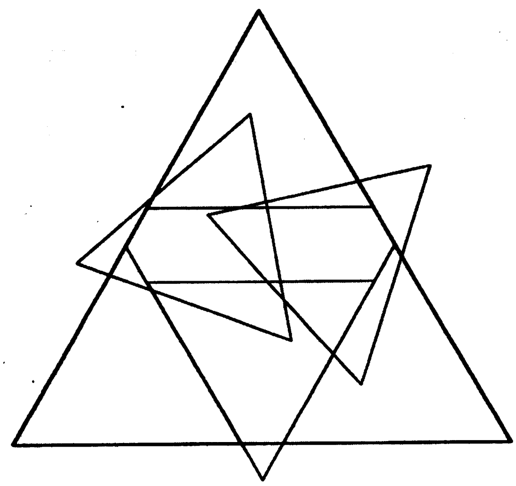


Figura 1

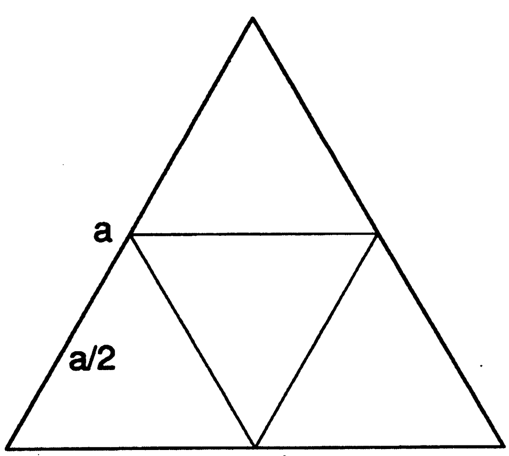


Figura 2

Segur que la figura 2 és a l'abast de tots els participants en aquell examen, i també de la majoria dels lectors. Mostra que un triangle equilàter de costat a es pot recobrir exactament amb quatre triangles equilàters de costat $b = a/2$. Aleshores, amb més motiu es podrà recobrir amb quatre triangles de costat b més gran que $a/2$. D'aquí deduïm que, si el triangle gran no es pot recobrir amb quatre triangles petits, llavors el costat b dels triangles petits ha de ser menor que $a/2$.

Així doncs, l'enunciat en cursiva quedarà demostrat —i el nostre problema resolt— si podem demostrar el següent: en cas que b sigui més petit que $a/2$, cinc triangles no són suficients. Aquí ens cal una demostració d'impossibilitat. Per exemple, suposem que $a = 100$ mm i que $b = 49$ mm. Hem de demostrar que, amb aquestes dades, ni una sola de les moltíssimes maneres imaginables (de fet, infinites) de col·locar els cinc triangles petits damunt del paper recobrirà completament el triangle gran. Les demostracions d'impossibilitat són de les més difícils que hi ha en les matemàtiques. Només cal recordar el temps que es va tardar a demostrar que la quadratura del cercle o la trisecció d'un angle arbitrari amb regle i compàs són impossibles. Des d'un punt de vista filosòfic, la situació és la següent: per demostrar que cap construcció, per més complicada que sigui, realitzada en el si d'una teoria donada no pot resoldre un problema determinat, ens cal disposar d'una altra teoria més potent. Dit d'una altra manera, necessitem un *deus ex machina*.

Per exemple, podríem intentar raonar fent servir l'àrea: si b fos substancialment més petit que a, podria passar que l'àrea conjunta dels cinc triangles petits fos menor que l'àrea del triangle gran. Si es donés aquest cas, llavors seria impossible, evidentment, que els cinc triangles petits recobrissin el gran, de cap manera que els poséssim. No obstant això, aquest raonament no serveix de res si b només és un xic més petit que $a/2$, com en l'exemple numèric anterior. En efecte, si b és igual a $a/2$, llavors l'àrea conjunta de quatre triangles petits és exactament igual a l'àrea del triangle gran (figura 2). Si b només és lleugerament més petit que $a/2$, llavors l'àrea conjunta de quatre triangles petits és gairebé igual a l'àrea del triangle gran, i l'àrea del cinquè passa ben bé del que hi falta.

L'àrea és un criteri massa global. És clar que necessitem una eina que tingui en compte la forma i la posició de les figures implicades. Si feu uns quants assaigs amb cinc triangles de costat un xic inferior a $a/2$, aviat veureu que cada vegada teniu dificultats per tapar, o bé els tres vèrtexs del triangle gran, o bé els punts mitjans de les tres arestes. Anem a treure suc d'aquesta observació.

Atenció! Ara ve el pas definitiu. A la figura 3 hem marcat els sis punts esmentats del triangle gran. La distància entre dos qualssevol d'aquests punts és com a mínim $a/2$. D'altra banda, la separació màxima possible entre dos punts del triangle petit és igual a la llargada del costat b, que és menor que $a/2$ per hipòtesi. Així doncs, cadascun dels triangles petits pot tapar com a molt un dels sis punts marcats, i per tant, és impossible que cinc triangles petits puguin tapar tots sis punts. D'aquesta manera hem demostrat que el triangle gran no es pot recobrir amb els cinc petits.

Tal com ha de ser, acabarem aquesta lliçó proposant un exercici. Recobriu el quadrat gran de la figura 4 amb tres còpies del quadrat petit. (Indicació per als qui ho vulguin intentar: la proporció entre el costat petit i el gran és de 0,78615 a 1.)

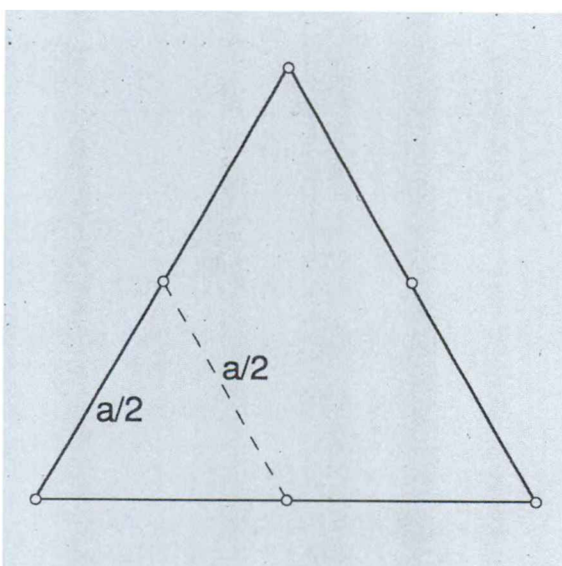


Figura 3

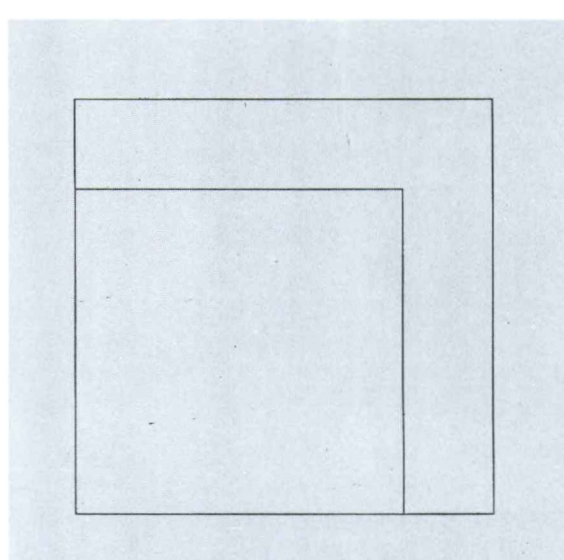


Figura 4

Christian Blatter és professor a l'ETH de Zuric.